النتائج ومناقشتها

يتضح من معادلة (22) أن التأخر الزمني -إذا ما تكونت الصور- يعتمد على البعد بين المصدر ومحور العدسة -الذي يمثله الخط الواصل بين الراصد والعدسة-. فضلا عن المؤثرات الأخرى المعروفة التي هي هندسة العدسة والزحزحة الحمراء للعدسة. والنتيجة المهمة هنا هي اختفاء الجهد في المعادلة، الأمر الذي يعني أن التأخر يعتمد على زاوية اقتراب الفوتون من مصدر المجال الجاذبي -العدسة-. وهذه كما نرى نتيجة منطقية لأن زاوية الاقتراب من العدسة هي التي تحدد طول المسار إلى الراصد أولا وتحدد تباين تأثير المجال في الأشعة المكونة للصور.

المراجع

[1]Collier, S., Horne, K., Wanders, I. and Peterson B.M., MNRAS, 302(1) (1999) 24.

[2]Refsdal, S., MNRAS, 128 (1964) 307.

[3]Walsh, D., Carswell, R. and Weymann, R., Nature, 279 (1979) 381.

[4]Kochanek, C.S. and Schechter, P.L., “the Hubble Constant from Gravitational Lens Time Delays”, Carnegie Observatories Astrophysics Series, Vol. 2, Measuring and Modeling the Universe ed. Freedman, W.L., (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003).

[5]Koopmans, L.V.E. and the Class Collaboration, PASA, 18 (2001) 2.

[6]Jackson, N., Living Rev. Rel. 10 (2007) 4.

[7]Narayan, R. and Bartelmann, M., "Lectures on Gravitational Lensing", in: Formation of Structure in the Universe; edited by Dekel A. and Ostriker J.P. (Cambridge University Press, 1997).

[8]Wambsganss, J., Review article for Living Reviews in Relativity, astro-ph/981202 v1.

[9]Schneider, P., Astron. Astrophys. 143 (1985) 413.

[10]Narasimha, D., Bull. Astr. Soc. India, 30 (2002) 723.

[11]Schneider, P., "Cosmological Applications of Gravitational Lensing", in: Examining the big bang and diffuse background radiations (209-217); edited by Kafatos M. and Kondo Y. (Kluwer Academic Publishers, Neitherlands, 1996). Also, astro-ph/9512047

[12]Al-Obayde, M.A. and Abrahem, S.A., JJP, 3(1) (2010) 41.

$$\nabla_{\theta}(\Delta t)=0 \tag{9}$$

في معادلة التأخر الزمني -المعادلة (3)- يفضي إلى المعادلة العامة للعدسة الجاذبية -المعادلة (4)-، وهو ما يعني صحة هذا المبدأ في العدسات الجاذبية.

الآن، باستخدام المعادلة (4a) في المعادلة (3) سنحصل على

$$\Delta t=\frac{1+Z_l}{c}D_{eff}\left[\frac{1}{2}\left(\nabla_{\theta}\vec{\psi}_{(\theta)}\right)^2-\psi_{(\theta)}\right] \tag{10}$$

فإذا أخذنا بمبدأ فيرما (المعادلة 9) وطبقناه على المعادلة (10) فان الصور ستظهر عندما

$$\frac{1}{2}\left(\nabla_{\theta}\psi_{(\theta)}\right)^2-\psi_{(\theta)}=n \tag{11}$$

حيث n ثابت.

واضح من معادلة (11) التي يمكن كتابتها بالصيغة

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\nabla_{(\theta)}\psi_{(\theta)}\right)=\pm\left(\psi_{(\theta)}+n\right)^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

انه بالإمكان الحصول على معادلة جديدة لحساب التأخير الزمني في حالة تكوّن الصور إذا ما وجدنا قيمة n بدلالة أحد العوامل الأساسية في معادلة العدسة -مواقع الصور والمصدر-.

لأن الانحدار في معادلة (12) باتجاه θ فإنه يمكن كتابتها بالصيغة التفاضلية

$$\frac{\partial\psi(\theta)}{\left(\psi_{(\theta)}+n\right)^{\frac{1}{2}}}=\pm\sqrt{2}\partial\theta \tag{13}$$

بإجراء التكامل على طرفي المعادلة (13) نحصل على

$$2\left(\psi_{(\theta)}+n\right)^{\frac{1}{2}}=\pm\left(\sqrt{2}\theta+k\right) \tag{14}$$

حيث k ثابت التكامل. بتربيع طرفي المعادلة (14) نحصل على

$$\psi_{(\theta)}=\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\theta k+\frac{k^2}{4}-n \tag{14a}$$

للسهولة سنفترض

$$k_0=\frac{k^2}{4}-n \tag{15}$$

فتصير معادلة (14a)

$$\psi_{(\theta)}=\frac{1}{2}\theta^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\theta k+k_0 \tag{16}$$

وباستخدام الشرط المحدد لحالة العدسة الذي هو: بغياب الجهد الجذبي الفعال ($\psi=0$) لا تتكون صورة وسنرى المصدر من دون صورة. بمعنى

$$k_0=0 \tag{17}$$

بتعويض (17) في (16) وإجراء التفاضل باتجاه θ نحصل على

$$\nabla_{(\theta)}\psi_{(\theta)}=\theta+\frac{k}{\sqrt{2}} \tag{18}$$

وبالمقارنة مع المعادلة (4) نحصل على

$$k=-\sqrt{2}\beta \tag{19}$$

التي نحصل باستخدامها في معادلة (15) على

$$n=\frac{1}{2}\beta^2 \tag{20}$$

فتكون حالة تكون الصور بحسب مبدأ فيرما متحققة عند

$$\frac{1}{2}\left(\nabla_{\theta}\psi_{(\theta)}\right)^2-\psi_{(\theta)}=\frac{1}{2}\beta^2 \tag{21}$$

وهذه تعني انه اذا تكونت الصور في العدسات الجاذبية فان التأخير الزمني يمكن حسابه وفق العلاقة

$$\Delta t=\frac{1+Z_l}{c}D_{eff}\left(\frac{1}{2}\beta^2\right) \tag{22}$$

التي يتضح منها أن التأخر الزمني سيعتمد على الموقع الزاوي للمصدر β فضلا عن أبعاد العدسة وانزياح الحمراء لعدسة.

ويلاحظ إنها تتطابق مع معادلة (7) عندما $(r_1)^2-(r_2)^2=\beta^2$ -في حال التعامل مع التأخير الزمني بين صورتين-. كما إنها لا تعطي تأخيرًا زمنيًا في حال وقوع المصدر على المحور $\beta=0$ وظهور حلقة أينشتاين. وهذا يتفق مع حقيقة عدم وجود تأخير زمني بين الصور عند ظهور حلقة أينشتاين.

معروف ناتج عن اختلاف المسارات التي يسلكها الفوتون للوصول إلى الراصد ويسمى – في هذه الحالة- التأخر الهندسي، كما ينتج التأخر عن تأثير المجال الجاذبي للعدسة،ويسمى – في هذه الحالة – التأخر الجاذبي. وعليه فان التأخر الكلي هو مجموع هذين التأخرين [8].

$$\Delta t = \frac{1+Z_l}{c} D_{eff}\left[\frac{1}{2}(\theta-\beta)^2 - \psi_{(\theta)}\right] \qquad (3)$$

D_{eff} (المسافة الفعالة وتساوي $(D_l\ D_s\ /D_{ls})$ حيث $(D_S\ ،D_{LS}\ ،D_L)$ هي مسافات القطر الزاوي بين الراصد والعدسة، والعدسة والمصدر، والراصد والمصدر، على التوالي، وθ الموقع الزاوي للصورة، وβ الموقع الزاوي للمصدر، و$\psi_{(\theta)}$ الجهد الفعال للعدسة والذي نحصل عليه من تكامل الجهد الجاذبي النيوتني على طول خط الرؤية باتجاه θ يمثل الحد الاول من معادلة (3) التأخر الهندسي ويمثل الحد الثاني التأخر الجذبي.

من السهل ملاحظة أنه، ليس التأخر الجاذبي وحده الذي يعتمد على الجهد الجاذبي بل التأخر الهندسي أيضا من حيث أن الانحناء $(\theta - \beta)$ يرتبط بزاوية الانحناء $\hat{\alpha}(b) = \frac{4GM}{c^2 b}$ (b عرض الحزمة) التي يحدثها المجال الجذبي من خلال زاوية الانحناء المنخفضة $\vec{\alpha}(\theta) = \frac{D_{LS}}{D_S}\hat{\vec{\alpha}}(b)$ بحسب قانون العدسات الجاذبية

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}\left(\vec{\theta}\right) \qquad (4)$$

التي - إذا ما اعتمدنا ما توصل إليه Narasimha [10] من أن الانحناء مساو لانحدار الجهد الفعال ثنائي الأبعاد $\psi(\theta)$ - ستأخذ الشكل

$$\vec{\theta} - \vec{\beta} = \vec{\nabla}_\theta \psi \qquad (4a)$$

تتضح من المعادلة أعلاه أهمية صيغة الجهد في حساب التأخر الزمني، مما يجعل مناقشة تباين قيم ثابت هابل في نماذج العدسات الجاذبية مناقشة لنماذج الجهد في هذه العدسات.

لا ننسى هنا أن هذه الصياغات للتأخر تعتمد تقريبين الأول هو أن زاوية الانحناء الجاذبي صغيرة، والثاني هو أن مسار الفوتون قرب العدسة - التي هي مجرة أو عنقود مجرات - قصير جدا مقارنة بمساره من المصدر إلى الراصد. وهو ما يعني أننا نستعمل نموذج العدسة الرقيقة الذي يعتمد فيه الجهد الجاذبي على دالة توزيع الكتلة بمعنى على الكثافة السطحية للعدسة (Σ).

$$\psi = \frac{G}{c^2}\int \frac{\left(b-\vec{b}'\right)\Sigma\left(\vec{b}'\right)}{\left|b-\vec{b}'\right|^2} d^2 b' \qquad (5)$$

$\left(\vec{b}-b'\right)$ هي المسافة من نقطة الانحناء إلى مركز العدسة. او يعتمد في حال نموذج فردنة الكرة متساوية الحرارة (singular isothermal sphere) (SIS) الذي يفترض أن مكونات العدسة من النجوم أو المجرات تتصرف وكأنها غاز تتحرك جزيئاته بسرعة متساوية، ومن ثم سيعتمد الجهد الجاذبي في هذه العدسة على توزيع الكثافة Σ بوصفها دالة لانتشار السرعة σ

$$\Sigma_{(b)} = \frac{\sigma^2}{2Gb} \qquad (6)$$

وفي حالة العدسة التي تظهر صورتين تبعدان r_1 و r_2 عن العدسة وعلى طرفيها بزاوية ليست مستقيمة في مستوى العدسة يحسب التأخر الزمني وفق [4]

$$\Delta t_{SIS} = \frac{1}{2}\frac{1+Z_l}{c} D_{eff}\left[(r_1)^2 - (r_2)^2\right] \qquad (7)$$

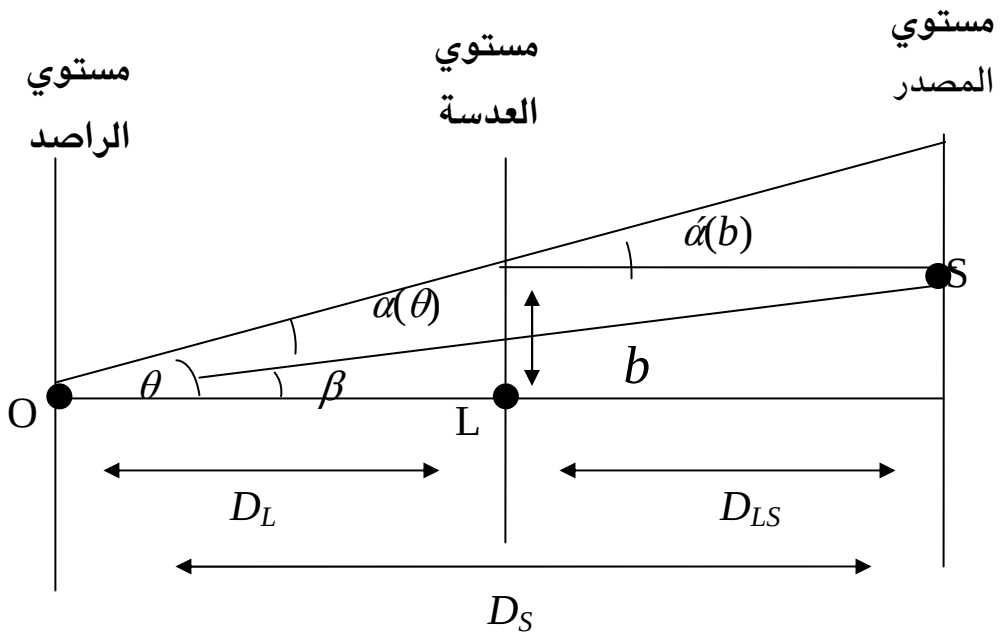
بينما يحسب التأخر الزمني بين صورتي العدسة النقطية بصياغات مختلفة منها [10]

$$\Delta t = \frac{1}{2c} D_{eff}\left[(\theta_1)^2 - (\theta_2)^2 + \mu \ln\frac{\theta_2}{\theta_1}\right] \qquad (8)$$

μ مقياس قوة العدسة ويساوي مربع نصف قطر أينشتاين $R_E{}^2 = \frac{4GM}{c^2 D_{eff}}$، و($\theta_1$ وθ_2) البعد الزاوي للصورتين عن العدسة. واضح من المعدلات (6 و7) المشتقتين من المعادلة (3) لجهدين مختلفين لنموذجين مختلفين أن النماذج المختلفة المفترضة للعدسة تفضي إلى صياغات مختلفة للجهد ومن ثم للتأخر الزمني مما يؤدي إلى الحصول على قيم مختلفة لثابت هابل.

اقتراح صياغة لحساب التأخر الزمني

معروف في البحوث المعنية بالعدسات الجاذبية أن تطبيق مبدأ فيرما (Fermat) المرتبط بالعدسات البصرية القائل باستقرار زمن وصول الأشعة المنتجة للصور [11] والذي يمكن كتابته بالصيغة



الشكل: (1): شكل يوضح عدسة الجاذبية [12]

S: المصدر الضوئي (source)؛ L: العدسة (Lens)؛ O: الراصد (Observer). β: الموقع الزاوي للمصدر؛ θ الموقع الزاوي للصورة؛ ($\acute{\alpha}(b)$: زاوية الانحناء (deflection angle)؛ $\alpha(\theta)$: زاوية الانحناء المخفضة (reduced deflection angle)؛ D_L: مسافة القطر الزاوي (angular diameter distance) بين الراصد والعدسة.

كان Refsdal [2] أول من أوضح إمكانية وكيفية حساب ثابت هابل من العدسات الجاذبية مستخدما افتراض العدسة النقطية – وكان ذلك قبل اكتشاف أول عدسة جاذبية بخمس عشر عاما- حيث توصل إلى علاقة تربط ثابت هابل بانزياح الحمراء للعدسة والمصدر Z_l، Z_s، وبالبعد الزاوي بين الصورتين α، ونورانية الصورتين الأولى والثانية L_1، L_2. والتأخر الزمني Δt

$$H = \frac{Z_l Z_s \alpha^2}{\Delta t(Z_s - Z_l)} \cdot \frac{\sqrt{L_1/L_2} - 1}{\sqrt{L_1/L_2} + 1} \qquad (2)$$

حيث يلاحظ من العلاقة أنها تعتمد على قياسات رصدية هي النورانية وانزياح الحمراء والتأخر الزمني.

بعد اكتشاف أول عدسة جاذبية في 1979 [3] وما تلاها من اكتشافات للعديد من العدسات بدأ الباحثون بتطبيق نظرية العدسة الجاذبية - بما فيها تحديد قيمة ثابت هابل- فواجهوا صعوبات عملية في القياس عندما يكون الاختلاف في فيض الصورتين صغيرا وفي حالات الصور الصغيرة التي لا يمكن تمييزها جيدا وفي حالات الصور المتداخلة أو القريبة من بعضها. كما واجهوا صعوبات نظرية في نمذجة (Modeling) جهود العدسة – التي تستخدم في حسابات التأخر الزمني - إما بسبب تعقيد هندسة العدسة. أو لفقر المعلومات في تحديد العوامل المهمة للجهود الجاذبية [4]. وظهر أن استخدام تقنيات ونماذج مختلفة لقياس وحساب زمن التأخير للعدسة الواحدة يعطي أزمنة مختلفة، فيؤدي هذا الاختلاف في زمن التأخر إلى اختلاف في قيمة ثابت هابل [5]. كما تبين أن استخدام نماذج مختلفة للعدسة نفسها يغير من قيمة ثابت هابل– للاطلاع على تفاصيل تباين القيم والنماذج انظر [6، 7]-. الصعوبات إذن نوعان، صعوبات عملية تتعلق بالقياسات وتقنياتها وهي خارج اهتمام هذا البحث، وصعوبات نظرية تتعلق بنمذجة الجهد الجاذبي المسبب لانحناء مسار الفوتون والتأخر الزمني وهي ما سنناقشه لبيان تباين مقدار ثابت هابل المستحصل من الحسابات المعتمدة على نماذج جهود مختلفة.

التاخر الزمني والجهد الجاذبي

يقصد بالتأخر الزمني، الفاصل الزمني بين ظهور أي تغير قابل للرصد في المصدر وظهور التغير ذاته في صورته. كما يمكن أن يكون معبرا عن الفاصل الزمني بين ظهور التغير ذاته في صورتي المصدر. وهو كما هو

المجلد 4، العدد 2، 2011. ص.ص 91-95

المجلة الأردنية للفيزياء

ARTICLE

بيان تباين قيم ثابت هبل باختلاف نماذج العدسات

مؤيد عزيز العبيدي
قسم الفيزياء، كلية العلوم، جامعة الموصل، الموصل، العراق.

Received on: 19/4/2011; Accepted on: 13/10/2011

الملخص: يهدف البحث إلى بيان التباين في قيم ثابت هابل التي يتم الحصول عليها من استخدام نماذج مختلفة للعدسات الجاذبية في حساب التأخر الزمني. لذا تضمن البحث عرضا للصعوبات العملية والنظرية التي تواجه الباحثين، وعرضا للعلاقة بين الجهد الجاذبي والتأخر الزمني. وقد اقترح البحث صياغة لحساب التأخر الزمني باعتماد مبدأ (فيرما) يكون فيها التأخر معتمدا على موقع المصدر فضلا عن الابعاد الهندسية لمنظومة العدسة وانزياح الحمراء للعدسة.

Showing the Variation of the Hubble Constant for Different Lens Models

M. A. Alobayde
Physics Department, College of Science, Mosul University, Iraq.

Abstract: The aim of this work is to show the variation of the values of the Hubble constant which are obtained using different gravitational lens models for calculating the time delay. The work involves a brief review of the practical and theoretical difficulties encountered by researchers in this field, and a review of the relation between the gravitational potential and the time delay. Using the Fermat principle, a formula for calculating the time delay is suggested. This formula depends upon the position of the source in addition to the geometrical dimensions of the lens system, and the redshift of the lens.

Keywords: Gravitational lens; Hubble constant; General relativity; Time delay.

المقدمة

يمثل ثابت هابل واحدا من الثوابت المهمة في الدراسات الكونية المتعلقة بمعدل اتساع الكون ومعدل إعاقة قوة الجذب لاتساعه، فضلا عن تحديد ثابت هابل لمعيار حجم الكون وعمره وكمية المادة المظلمة فيه، ويحدد الكثافة الباريونية المتولدة في الانفجار الهائل وفترة تكون المجرات والكوازرات [1]. هناك عدة طرق لحساب هذا العامل تعتمد نظريا على ما يعرف بقانون هابل الذي يربط سرعة ابتعاد الأجسام الكونية ببعدها عن الراصد

$$V = HD \qquad (1)$$

حيث V سرعة الابتعاد وH ثابت هابل وD البعد عن الراصد، وتعتمد عمليا على قياسات النورانية وانزياح الحمراء.

ويعتقد الآن أن العدسات الجاذبية - الشكل (1)- من أدق الوسائل لحساب هذا الثابت. لذا نالت قياسات العوامل المؤثرة في العدسات الجاذبية اهتماما مميزا من قبل الباحثين في علم الكون والنظريات المرتبطة به وخاصة نظرية النسبية العامة.

Corresponding Author: M. A. AL-Obayde. **Email**: malobayde@yahoo.com.