References

[1]Einstein, A. Annalen der Physik, 49 (1916) 160.

[2]Newton, I. "Opticks", (Dover, New York, 1979).

[3]Silverman, M.P. Am. J. Phys. 48(1) (1981) 72.

[4]Gine, J. Chaos Solitons Fractals, 35(1) (2008) 1.

[5]Anderson, M.G. Phys. Lett. A, 122, 6-7 (2004) 299.

[6]Finelli, F., Galaverni, M. and Gruppuso, A. Phys. Rev. D, 75 (2007) 043003.

[7]Rindler, W. and Ishak, M. Phys. Rev. 76 (2007) 043006.

[8]Ishak, M. Phys. Rev. D, 78 (2008) 103006.

[9]Dodelson, S. "Modern Cosmology". (Amsterdam, The Netherlands Academic, 2003).

[10]Lewis, A. and Challinor, A. Phys. Rep. 492 (2006) 1.

[11]Dodelson, S. and Vale, C., J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 6621.

[12]Beloborodov, A.M., Astophys. J. 556 (2002) L85.

[13]Poutanen, J. and Gierlinski, M., Mon. Not. Astron. Soc. 343 (2003) 1301.

[14]Viironen, K. and Poutanen, J. Astronomy & Astrophysics, 426 (2004) 985.

[15]Weinberg, S. "Gravitation and Cosmology". (John Wiley and Sons. Ince., 1972).

واستنادا إلى المعادلتين (13) و(15) نحصل على:-

$$\psi = \int_R^\infty -\frac{b}{r^2}\left[1-\frac{b^2}{r^2}B(r)\right]^{-1/2} dr \qquad (22)$$

وهذه تتطابق تماما مع ما توصل إليه [12] باستخدام تعريف الخط الضوئي

$$U^\mu U_\mu = 0$$

ومن المعادلة (20) و(21) نحصل على معادلة مسار الضوء:-

$$\left.\begin{aligned} r(\psi) = &\left[\frac{r_g^2}{4}\frac{(1-\cos\psi)^2}{(1+\cos\psi)^2}+\frac{b^2}{\sin^2\psi}\right]^{1/2} \\ &-\frac{r_g}{2}\frac{(1-\cos\psi)}{(1+\cos\psi)}\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

بدلالة زاوية الهروب، وأيضا على علاقة تربط زاويتي الهروب والانبعاث:

$$1-\cos\alpha = (1-\cos\psi)B(r) \qquad (24)$$

فإذا ما استخدمنا حل شوارزجايلد المتمثلة عناصره في:-

$$B(r) = A^{-1}(r) = 1-\frac{2GM}{Rc^2} = 1-\frac{r_g}{R}$$

حيث $r_g = 2GM/c^2$ ويمثل نصف قطر شوارزجايلد، وبذلك تكون المعادلة (24):-

$$1-\cos\alpha = (1-\cos\psi)(1-\frac{r_g}{R}) \qquad (25)$$

التي تمثل معادلة مسار الضوء بوصفه دالة لزاوية الهروب. واستنادا إلى المعادلة (25) نحصل على العلاقات:-

$$1-\cos\psi = \frac{(1-\cos\alpha)}{(1-r_g/R)} \qquad (26.a)$$

وبعمليات حسابية نحصل على:-

$$1+\cos\psi = 2-\frac{1-\cos\alpha}{1-r_g/R} \qquad (26.b)$$

واستنادا إلى العلاقة:-

$$\sin^2\psi = 1-\cos^2\psi \text{ , there for,}$$

$$\sin^2\psi = \left(1-\cos\psi\right)\left(1+\cos\psi\right) \qquad (26.c)$$

وباستخدام العلاقات (26.a), (26.b), (26.c) في المعادلة (23) نحصل على:-

$$r(\alpha) = \left[\begin{aligned}&\frac{r_g^2}{4}\left(\frac{(1-\cos\alpha)/(1-r_g/R)}{2-\left((1-\cos\alpha)/(1-r_g/R)\right)}\right)^2 \\ &+\frac{b^2}{\left((1-\cos\alpha)/(1-r_g/R)\right)\left(2-(1-\cos\alpha)/(1-r_g/R)\right)}\end{aligned}\right]^{1/2} -\frac{r_g}{2}\frac{(1-\cos\alpha)/(1-r_g/R)}{2-\left((1-\cos\alpha)/(1-r_g/R)\right)} \qquad (27)$$

التي تمثل مسار الضوء بدلالة زاوية الانبعاث.

المناقشة

تشير معادلة (26.a) إلى أن الضوء المنبعث بزاوية صفر من أية نقطة في المجال الشديد- يهرب بالزاوية نفسها، وهذا معناه بحسب المعادلة (1) انه لا ينحني بتأثير المجال الجذبي. كما تشير إلى ان الضوء المنبعث بزاوية قائمة يهرب بزاوية سالبة بالنسبة لاتجاه المراقب بغض النظر عن موقع نقطة الانبعاث. وهذا معناه ارتداد الإشعاع إلى الخلف ونلاحظ أيضا أن مقدار زاوية الارتداد يعتمد على موقع الانبعاث فحسب. ويتصرف الضوء بنفس الطريقة في حالة الانبعاث بزاوية اكبر من القائمة.

من كل ما سلف يتضح أن شدة الضوء الذي يصلنا من مناطق ذات مجال جذبي شديد النجوم النيترونية مثلا هو أقل من المنبعث عن المصدر وهي مسالة بالغة الأهمية في الدراسات الكونية والفلكية التي تعتمد على شدة الضوء الواصل إلى المراقب.

المعادلتان (10) و(11) تعنيان ان الكميات بين الأقواس تمثل ثوابت بالنسبة للمتغير p. والتي يمكن ان نحصل منها على المركبات اللاتغايرية (Contravariant) للسرع باتجاه الإحداثيات (t, r, φ):-

$$\frac{dt}{dp}=\frac{1}{B(r)}=U^{t} \tag{12}$$

U^t تمثل مركبة سرعة الضوء باتجاه الإحداثي الزماني، والتي تكتب عادة بالصيغة (U^0).

$$r^2\frac{d\phi}{dp}=\text{constan } t=b$$

$$\frac{d\phi}{dp}=\frac{b}{r^2}=U^{\phi}=U^3 \tag{13}$$

حيث إن U^{ϕ} أو U^3 تمثل مركبة سرعة الضوء باتجاه الاحداثي φ. وb ثابت الحركة - الذي يمثل الزخم الزاوي لوحدة الكتلة إذا كانت معادلة الحركة لجسم كتلوي، ويمثل عرض الحزمة (Impact parameter) في حالة الأشعة الكهرومغناطيسية.

و للحصول على مركبة سرعة الضوء النصف قطرية U^rنستخدم المعادلتين (12) و(13) في المعادلة (6) فنحصل على:-

$$A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+\frac{b^2}{r^2}-\frac{1}{B(r)}=0 \tag{14}$$

نضرب المعادلة (14) بـ $[A(r)]^{-1}$ فنحصل على:-

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+\frac{b^2}{r^2A(r)}-\frac{1}{B(r)A(r)}=0$$

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+\frac{b^2}{r^2A(r)}-1=0$$

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2=1-\frac{b^2}{r^2A(r)}=(U^r)^2=(U^1)^2$$

ومن $((dr/dp)^2=(U^1)^2)$ التي تمثل مربع مركبة سرعة الضوء نصف القطرية اللاتغايرية نحصل على:-

$$U^1=\left(1-\frac{b^2}{r^2A(r)}\right)^{1/2}$$

$$U^1=\left(1-\frac{b^2}{r^2}B(r)\right)^{1/2} \tag{15}$$

وباستخدام عملية خفض الرموز (Lowering of index) - $(U_\mu=g_{\mu\nu}U^\nu)$ - ومن $U^0=1$ و $g_{00}=B(r)$ ومن المعادلة (15) و$g_{11}=A(r)$ والمعادلة (13) و$g_{33}=r^2$ نحصل على المركبات التغايرية (Covariant):-

$$U_0=B(r) \tag{16}$$

$$U_3=b$$

$$U_1=\left(A^2(r)-\frac{b^2}{r^2}A(r)\right)^{\frac{1}{2}}$$

ومنها نحصل على:-

$$U^1U_1=A(r)-\frac{b^2}{r^2} \tag{17}$$

$$U^3U_3=\frac{b^2}{r^2} \tag{18}$$

واستنادا إلى الشكل (1) نحدد زاوية انبعاث الضوء:-

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{U^3U_3}{U^3U_3+U^1U_1}} \tag{19}$$

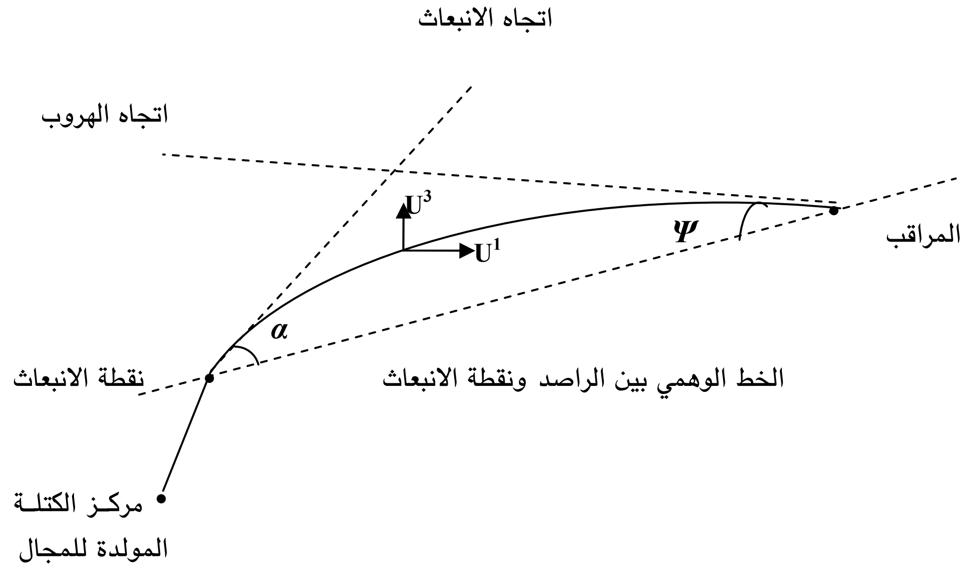
وباستخدام المعادلتين (17) و(18) في المعادلة (19) نحصل على:-

$$\sin\alpha=\frac{b/r}{\sqrt{A(r)}}$$

$$\sin\alpha=\frac{b}{r}B^{1/2}(r) \tag{20}$$

أما زاوية الهروب فإنها تنتج عن تغير مركبات السرع المماسية والقطرية. وهذا يعني ان زاوية هروب الضوء تتشكل من مجموعة التغيرات باتجاهي 1 و3 لشعاع الضوء من نقطة انبعاثه بزاوية α عند $r=R$ إلى أن يصل إلى $(r=\infty)$ والتي نعبر عنها بالتكامل على طول المسار من نقطة الانبعاث إلى نقطة الهروب.

$$\psi=\int_R^\infty-\frac{U^3}{U^1}dr \tag{21}$$



الشكل (1). مسار الضوء المنبعث بزاوية انبعاث α من نجم نيتروني ومرصود بزاوية هروب Ψ

بالتعويض عن عناصر $g_{\mu\nu}$ من المعادلة (2) في المعادلة (4) نحصل على قيم $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ غير الصفرية[15]:-

$$\left.\begin{array}{ll}
\Gamma^{r}_{rr}=\dfrac{1}{2A(r)}A^{/}(r) & \Gamma^{r}_{\theta\theta}=-\dfrac{r}{A(r)}\\
\Gamma^{r}_{\phi\phi}=-\dfrac{r\sin^{2}\theta}{A(r)} & \Gamma^{r}_{tt}=\dfrac{1}{2A(r)}B^{/}(r)\\
\Gamma^{\theta}_{r\theta}=\Gamma^{\theta}_{\theta r}=\dfrac{1}{r} & \Gamma^{\theta}_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta\\
\Gamma^{\phi}_{\phi r}=\Gamma^{\phi}_{r\phi}=\dfrac{1}{r} & \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}=\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}=\cot\theta\\
\Gamma^{t}_{tr}=\Gamma^{t}_{rt}=\dfrac{1}{2B(r)}B^{/}(r) &
\end{array}\right\} \quad (5)$$

الفتحة في أعلى الرمز تعني التفاضل بالنسبة لـ (r). وباستخدام المعادلات (5) في معادلة الحركة (3) نحصل على معادلات الحركة للمحاور الأربعة:-

μ=1

$$\begin{aligned}&\frac{d^{2}r}{dp^{2}}+\frac{A^{/}(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^{2}-\frac{r}{A(r)}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^{2}\\&-r\frac{\sin^{2}\theta}{A(r)}\left(\frac{d\phi}{dp}\right)^{2}+\frac{B^{/}(r)}{2A(r)}\left(\frac{dt}{dp}\right)^{2}=0\end{aligned}\qquad(6)$$

μ=2

$$\frac{d^{2}\theta}{dp^{2}}+\frac{2}{r}\frac{d\theta}{dp}\frac{dr}{dp}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{dp}\right)^{2}=0\qquad(7)$$

μ=3

$$\frac{d^{2}\phi}{dp^{2}}+\frac{2}{r}\frac{d\phi}{dp}\frac{dr}{dp}+2\cot\theta\frac{d\phi}{dp}\frac{d\theta}{dp}=0\qquad(8)$$

μ=0

$$\frac{d^{2}t}{dp^{2}}+\frac{B^{/}(r)}{B(r)}\frac{dt}{dp}\frac{dr}{dp}=0\qquad(9)$$

التي تصف مسار الضوء بدلالةٍ الإحداثيات الكروية الأربعة. ولأن الفضاء الكروي هو فضاء متماثل (isotropic) فسنأخذ مسار الضوء الواقع ضمن المستوي $(\theta=\pi/2)$. وهذا يعني إن $(d\theta=0)$. وهذا الافتراض يحقق المعادلة (7).

نضرب المعادلة (8) بـ $(dp/d\varphi)$ والمعادلة (9) بـ (dp/dt)، ومن تعريف تفاضل الدالة اللوغارتمية نحصل على:-

$$\frac{d}{dp}\left[\ln\frac{d\phi}{dp}+\ln r^{2}\right]=0\qquad(10)$$

$$\frac{d}{dp}\left[\ln\frac{dt}{dp}+\ln B\right]=0\qquad(11)$$

وعلى الرغم من أن الدراسات والبحوث- التي درست ظاهرة انحناء الضوء سواء ما كان منها معتمدا فيزياء نيوتن أو قوانين البصريات أو نظرية النسبية العامة- قد اتفقت على أن العاملين الأكثر تأثيرا في زاوية الانحناء هما الكتلة المولدة للمجال الجذبي (M) وبعد مسار الضوء عن مركز هذه الكتلة (r). إلا أن هذين العاملين ليسا الوحيدين في التأثير على زاوية الانحناء. فلقد أظهرت دراسة [6] أن للطاقة السوداء (Dark energy) تأثيرا في زاوية انحناء الضوء وليس من تأثير للثابت الكوني (Cosmological constant) فيها، ولكن [7] اثبتا وجود تأثير للثابت الكوني، وقام [8] بحساب هذا التأثير معتمدا على الجهد الجذبي.

ومن ثم فإن البحث في الثابت الكوني والطاقة السوداء وظاهرة العدسات الجذبية (Gravitational lensing) وأهميتها في دراسات الكون وأبعاد المجرات وكتلها وأشكالها وتوزيع الكتل فيها، أدت إلى الاهتمام المتزايد[9, 10, 11] بدراسة ظاهرة انحناء الضوء في المجالات الجذبية.

وإذا ما تأملنا هذه المعالجات -سواء التي تعتمد فيزياء نيوتن أو النسبية العامة- فإننا سنجد مشتركا في أسلوب المعالجة يقوم على افتراض اقتراب ضوء منبعث من مجال جذبي ضعيف من مجال جذبي شديد. كما سنجد ندرة في معالجات ضوء منبعث من مجال جذبي شديد باتجاه مجال جذبي ضعيف، على الرغم من أهمية مثل هذه المعالجات في دراسة الوماضات (Pulsars) التي تتكون من نجمين أحدهما نجم نيتروني [12, 13, 14] فالومضات المرصودة من مشاهد على الأرض هي أشعة منبعثة من مجال جذبي شديد هو مجال النجم النيتروني ومرصودة في مجال جذبي ضعيف هو مجال الأرض. وعليه فان دراسة انحراف الضوء في مثل هذه الحالة سيكون مهما جدا في دراسة تغير شدة الفيض القادم إلينا من الوماضات باعتبار أن الانحناء سيؤدي إلى انحراف مسار الأشعة القادمة إلينا وبالتالي التأثير على كثافة الفيض المستلمة.

وحيث إن مقدار زاوية انحناء الضوء (β) المنبعث من مجال جذبي شديد تتأثر بزاوية انبعاثه (α) - التي هي الزاوية المحصورة بين اتجاه الانبعاث والخط الوهمي الواصل بين نقطتي الانبعاث والرصد- باعتبار أن زاوية الانحناء تمثل الفرق بين زاوية هروب الضوء (Ψ) - التي هي الزاوية المحصورة بين اتجاه الضوء المرصود والخط الوهمي بين الراصد ونقطة الانبعاث - وزاوية انبعاثه:

$$\beta = \psi - \alpha \tag{1}$$

فان هذا يعني أن زاوية الانحناء ستتأثر مباشرة بزاوية الانبعاث.

ولأننا نتعامل مع مجالات جذبية شديدة في موقع الانبعاث - النجوم النيترونية - فإننا سنستخدم المعالجة المعتمدة على نظرية النسبية العامة باعتبارها النظرية الأكثر دقة في التعامل مع المجالات الجذبية الشديدة المرتبطة بالثقوب السوداء أو النجوم النيترونية أو أي كتل عملاقة تفوق كتلة الشمس.

العلاقة بين زاويتي الانبعاث والانحناء

لدراسة انحناء الضوء المنبعث من مجال جذبي شديد باتجاه مجال جذبي ضعيف، سنفترض ضوءا ينبعث من فضاء قرب نجم نيوتروني - كما في الشكل (1):-

وإن هذا الفضاء يصفه الخط الأولي (line element)

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\left.\begin{aligned} d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 \\ - r^2 \sin\theta^2 d\phi^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

حيث إن $B(r) = A^{-1}(r)$ دالة للمكان. وسنستخدم معادلة الحركة العامة في المجال جذبي لوصف مسار الضوء.

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0 \tag{3}$$

حيث p عامل يصف المسار. و (μ, ν, λ) رموز تأخذ الأرقام (0, 1, 2, 3) تمثل الإحداثيات الكروية الأربعة (t, r, θ, ϕ). وإن تكرار أي منها يعني وجود جمع على الأبعاد الأربعة. و $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ علاقة الربط الريمانية التي تعرف:-

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho} \right) \tag{4}$$

(الفارزة تعني تفاضلا بالنسبة للاحداثي الذي يمثله الرمز الذي يليها).

المجلد 2، العدد 2، 2009. ص.ص 125-130

المجلة الأردنية للفيزياء

ARTICLE

تأثير زاوية انبعاث الضوء في زاوية انحنائه

M. A. AL-Obayde and **S. E. Khaleel**

Physics Department, College of Science, Mosul University, Iraq.

Received on: 16/11/2008; Accepted on: 26/3/2009

الملخص: يهدف هذا البحث إلى بيان تأثير زاوية انبعاث الضوء من نقطة ما في مجال جذبي شديد على زاوية انحنائه. لأجل هذا درسنا انحناء الضوء المنبعث من نقطة في مجال جذبي شديد باتجاه مجال جذبي ضعيف. إذ قمنا بحل معادلة الحركة لفوتون منبعث من نقطة قرب نجم نيوتروني كروي ساكن – وفقا للنظرية النسبية العامة - لإيجاد مركبات السرعة الرباعية. وبدلالة هذه المركبات وجدنا كلا من زاوية الانبعاث و زاوية الهروب.ثم وجدنا علاقة تربط بين زاويتي الانبعاث والهروب استنتجنا منها ان الضوء المنبعث بالاتجاه القطري لا يعاني انحناء في حين يرتد الضوء المنبعث بزاوية قائمة. كما توصلنا إلى معادلة تصف مسار الفوتون بدلالة زاوية الانبعاث.

كلمات مفتاحية: زاوية انبعاث الضوء، مجال الجذب، زاوية انحناء الضوء، النسبية العامة، زاوية الهروب.

The Effect of the Emission Angle of the Light on Its Bending

Abstract: The aim of this work is to demonstrate the effect of light emission angle from some point in a strong gravitational field of its bending angle. For this purpose, the light bending from a point of high gravitational field to a weaker one is studied. The general relativistic equation of motion of a photon emitted from a point on a spherical static neutron star is solved to find the four velocity components, from these components, both emission angle and escape angle were found. A relation between those two angles is found, from this relation, it is deduced that light emitted in the radial direction suffers no bending while that emitted at right angle is reflected back. A relation relating the photon path and emission angle is also deduced.

Keywords: Light emission angle; Gravitational field; Light bending angle; General relativity; Escape angle.

المقدمة

لم يكن تنبؤ اينشتاين بانحناء الضوء[1] في الفضاء المحدب هو أول إشارة إلى ظاهرة انحناء الضوء. إذ سبقه نيوتن في الإشارة إليها - بما ينسجم مع نظريته الجسيمية للضوء- في عام (1704) في رسالته في البصريات[2].

وليست نظرية النسبية العامة هي وحدها القادرة على حساب زاوية انحناء الضوء عند اقترابه من الكتل العملاقة. فقد قام الباحثان[3, 4] بدراسة ظاهرة الانحناء وحساب زاويتها وفق الميكانيك الكلاسيكي.

وقام [5] بدراستها وفق قوانين البصريات التي تصف الانكسار عند اختلاف الأوساط البصرية التي يمر من خلالها الضوء.

ولكن هذا لا ينفي أن النظرية النسبية العامة[1] قدمت رياضيات أكثر دقة في دراسة الظاهرة وحساباتها.

Corresponding Author: M. A. AL-Obayde. **Email**: malobayde@yahoo.com.