

## المراجع

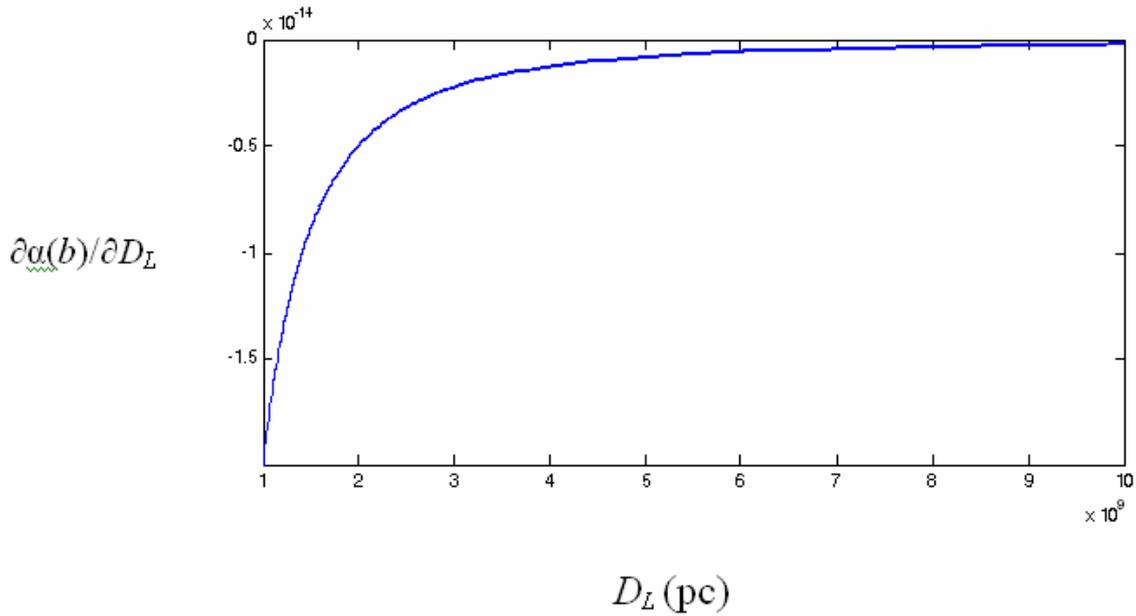
- [9]Branch, D., Vaughan, T. and Kantowski, R., APJ, 447 (1995) 35.
- [10]Fort, B. and Mellier, Y., Gravitational lensing and test of the cosmological constant, in: Fourth Paris Cosmology Colloquium: Phase Transition in Cosmology Euro Conference by H. de Vega and N. Sanchez (1998) p. 288.
- [11]Jackson, N., Living Rev. Rel. 10 (2007) 4.
- [12]Mukherjee, K., Ph.D. Thesis, University of Pittsburgh, (2005).
- [13]Blandford, R.D. and Narayan, R., Annu. Rev. Astron. Astrophys. 30 (1992) 311.
- [14]Narayan, R. and Bartelmann, M., in: Formation of Structure in the Universe; edited by A. Dekel and J.P. Ostriker; (Cambridge University Press, 1999) p. 360.
- [15]Wambsganss, J., "Gravitational Lensing in Astronomy", Living Reviews in Relativity, (1998).
- [16]Chwolson, O., APJ, 57 (1924) 238.
- [17]Einstein, A., Science, 84 (2188) (1936) 506.
- [18]Refsdal, S. and Surdej, J., Rep. Prog. Phys. 57 (1994) 117.
- [1]Swinbank, A.M., Bower, R.G., Smith, G.P., Wilman, R.J., Smail, I., Ellis, R.S., Morris, S.L. and Kneib, J.P., MNRAS, 376 (2007) 479.
- [2]Trott, C. and Webster, R., International Astronomical Union Symposium no. 220, held 21-25 July 2003, Sydney, Eds. Ryder S. D. *et al.* (2003) p. 109.
- [3]Schneider, P., "Gravitational lensing as a probe of structure", in: Dark Matter and Dark Energy in the Universe, Proceedings of the XIV Canary Islands Winter School of Astrophysics, Tenerife, Spain (2003).
- [4]Courbin, F., Gravitational lensing: a unique tool for cosmology, ASP Conference Series, Vol. xxx, (2003).
- [5]McInnes, R.N., Institute for Astronomy, Royal Observatory of Edinburgh, Blackford Hill, Edinburgh, EH9 3HJ, Pedagogical Seminar, 25<sup>th</sup> March (2008).
- [6]Zacek, V., (2008), "Dark matter", in: "Fundamental Interactions", edited by Astburty, A., Khanna, F. and Moore, R., World Scientific, Proc. of the 22nd Lake Louise Winter Institute, February 2007.
- [7]Heavens, A., Lect. Notes Phys. 665 (2009) 585.
- [8]Rzepecki, J.P., Ph.D. Thesis, University of Heidelberg, (Germany, 2007).

$$\frac{\partial \alpha(\theta)}{\partial \Sigma} = \frac{\theta}{\Sigma_{crit}} \quad (15)$$

التي نلاحظ منها أن تأثير الكثافة السطحية في بعد الصورة يكون ثابتاً.

التي يوضح رسمها الشكل (2). ويتضح من الشكل أن شدة تأثير بعد العدسة تتضاءل عندما تبعد العدسة كثيراً عن الراصد، وأن اتجاه تغير الشدة يكون معاكساً لاتجاه تغير بعد العدسة، وهو ما تشير إليه الإشارة السالبة في المعادلة (14).

ولمعرفة شدة تأثير الكثافة السطحية  $\Sigma$  في بعد الصورة  $\alpha(\theta)$ ، نأخذ مشتقة بعد الصورة بالنسبة إليها بثبوت  $(\theta)$  في المعادلة (9) لنحصل على:



الشكل (2): شدة تأثير بعد العدسة ( $D_L$ ) في تغير بعد الصورة عن المصدر  $\alpha(\theta)$  بالنسبة إليه.

اعتمدنا في الرسم ( $\Sigma = 4$ )، و ( $b = 5 \times 10^3 \text{ pc}$ ) [18] [Refsdal & Surdej, 1994].

ويمكن للمعادلة (11) أن تعطينا توزيع الكتلة للمجرات أو لعناقيدها التي تتصرف كعدسة من خلال معرفة الأبعاد الهندسية للعدسة وموقع صورة مصدر معلوم، وذلك بتعويض مقدار الكثافة الحرجة وموقع الصورة والموقع الحقيقي للمصدر.

إن العلاقة بين بعد الصورة والكثافة السطحية للعدسة علاقة خطية تشير إلى أن تمايز الصورة عن المصدر يكون أوضح إذا كانت الكثافة السطحية للعدسة كبيرة، وينطبق هذا أيضاً على عرض الحزمة.

## الاستنتاجات العامة

إن تأثيرات الأبعاد الهندسية في موقع الصورة تختلف باختلاف النموذج التقريبي الذي يتم اعتماده. وقد يكون هذا من أسباب تباين قيمة ثابت هبل التي يتم إيجادها بواسطة عدسات الجاذبية، وذلك لأن حساب ثابت هبل باستخدام العدسات الجاذبية يعتمد على حساب زمن التأخير (time delay) الذي يعتمد بدوره على علاقة الأبعاد الهندسية مع موقع الصورة.

إن المعادلة (11) التي تعطي الزاوية المحصورة بين المحور البصري والموقع الحقيقي للمصدر تعطي المعلومات نفسها التي تعطيها معادلة العدسات المعروفة -المعادلة (3)-.

$$\theta_E = \theta \left( \frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12-b)$$

الذي يمكننا من إعادة صياغة معادلة العدسات (9) بدلالة ( $\theta_E$ ) لنحصل منها على المعادلة المعروفة:

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

وهي كما يلاحظ معادلة غير خطية، تشير إلى أن للمصدر الذي في الموقع ( $\beta$ ) صورتين تحدد موقعهما العلاقة:

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right)$$

لدراسة تأثير الأبعاد الهندسية في موقع الصور،

نعوض ( $\theta = \frac{b}{D_L}$ ) في المعادلة (9) لنحصل على:

$$\hat{\alpha}(\theta) = \frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}} \frac{b}{D_L} \quad (13)$$

وهي علاقة تشير إلى السلوك الخطي للعلاقة بين بعد الصورة عن المصدر ( $\hat{\alpha}(\theta)$ ) وعرض الحزمة ( $b$ ) وبين والكثافة السطحية ( $\Sigma$ ). كما تشير إلى السلوك العكسي لبعد الصورة عن المصدر مع بعد العدسة عن الراصد، أي أنه كلما ابتعدت العدسة عن الراصد اقتربت الصورة من المصدر. ويتضح من العلاقة أيضاً الفرق في تصرف عرض الحزمة ( $b$ ) الذي صار خطياً (طرياً) في هذه الحالة، بينما هو عكسي في التقريب النقطي<sup>[18]</sup>.

وذلك كما نرى لأن لعرض الحزمة تأثيراً تربيعياً طرياً في الكتلة المولدة للمجال في حالة العدسة الرقيقة، وليس له مثل هذا التأثير في العدسة النقطة.

وللإجابة عن سؤال محتمل هو "هل يبقى تأثير بعد العدسة في موقع الصورة فاعلاً وبالشدّة نفسها عند كل الأبعاد الممكنة للعدسة عن الراصد؟" نأخذ تغاير ( $\hat{\alpha}(\theta)$ ) بالنسبة إلى ( $D_L$ ) في المعادلة (13) بثبوت كل من الكثافة الكتلية السطحية للعدسة ( $\Sigma$ ) وعرض الحزمة، لنحصل على:

$$\frac{\partial \alpha(\theta)}{\partial D_L} = - \frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}} \frac{b}{D_L^2} \quad (14)$$

التي يمكن أن نعدها صيغة أخرى لمعادلة العدسة بدلالة كثافة الكتلة السطحية التي تحتوي ضمناً على الأبعاد الهندسية، التي بافتراض ثبوتها تكون العوامل المؤثرة في العدسة هي كثافة الكتلة السطحية للعدسة ( $\Sigma$ ) والكثافة الحرجة.

إن أول ما يلاحظ في المعادلة (9) أنه إذا كانت الكثافة السطحية مساوية للكثافة الحرجة فإن:

$$\alpha(\theta) = \theta \quad (10)$$

التي تشير إلى الحصول على صورة واحدة يكون بعدها عن المصدر مساوياً لبعدها عن المحور البصري، وهي حالة مماثلة لظهور حلقة آينشتاين في عدسة الكتلة النقطية التي تكون الصورة فيها بشكل حلقة محيطة بالعدسة، والتي تظهر عندما يقع المصدر على المحور البصري ( $\beta = 0$ ). ومن السهل ملاحظة أن الافتراض ( $\beta = 0$ ) الذي أدى إلى استنتاج ظهور الصورة على شكل حلقة<sup>[17,16]</sup> هو في الحقيقة نتيجة مباشرة للمعادلة (8) إذا ما تم تعويضها في المعادلة (3). ومن ثم يمكن أن تمثل  $\theta$  في المعادلة (10) نصف قطر آينشتاين الزاوي ( $\theta_E$ ). وإذا ما استخدمنا المعادلة (9) في معادلة العدسات (3) فسنحصل على صيغة جديدة لمعادلة العدسة:

$$\beta = \theta \left( 1 - \frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}} \right) \quad (11)$$

التي توضح أنه عند ( $\Sigma \gg \Sigma_{crit}$ ) تكون ( $\beta = 0$ )؛ بمعنى ظهور صورة المصدر على المصدر نفسه، فلا يرى الراصد صورة للمصدر. وهذا ما ينطبق مع شرط تعدد الصور ( $\Sigma > \Sigma_{crit}$ ) المعروف. كما يتضح منها أنه عند ( $\Sigma_{crit} = \Sigma$ ) تكون ( $\beta = 0$ )، وهذا يؤيد ما ذهبنا إليه من أن المعادلة (10) تمثل نصف قطر آينشتاين الزاوي ( $\theta_E$ ) في حال اعتماد تقريب العدسة الرقيقة. وعليه، فبإجراء تعويضات جبرية بسيطة في شرط ظهور الحلقة ( $\Sigma_{crit} = \Sigma$ ) نحصل على نصف قطر آينشتاين الزاوي:

$$\theta_E = \left( \frac{M(b)}{\pi D_L^2 \Sigma_{crit}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12-a)$$

أو:

$$M(b) = 2\pi \int_0^b \Sigma(b') b' db' \quad (4)$$

حيث  $M(b)$  هي كتلة دائرة نصف قطرها  $(b)$ . وتكون زاوية الانحناء المتجهة:

$$\hat{\alpha}(\vec{b}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{\left( \vec{b} - \vec{b}' \right) \Sigma(\vec{b}')}{\left| \vec{b} - \vec{b}' \right|^2} d^2 b' \quad (5)$$

حيث  $(\vec{b} - \vec{b}')$  هي المسافة من نقطة الانحناء إلى مركز العدسة.

وفي حالة الكتلة المتجانسة والمتناظرة تؤخذ نقطة الأصل عند مركز العدسة فتكون الكتلة المولدة للانحناء  $(M(b) = \Sigma \pi b^2)$ ، وزاوية الانحناء:

$$\alpha(b) = \frac{4G}{c^2} \Sigma \pi b \quad (6)$$

ولأنها متناظرة، فإنه بالإمكان اختيار مستوى واحد يضم المصدر، وعرض الحزمة، والمحور البصري. وباستخدام تعريف القطر الزاوي  $(\theta = \frac{b}{D_L})$ ، وتعويض المعادلة (2) في المعادلة (6)، نحصل على زاوية الانحناء المخفضة:

$$\alpha(\theta) = \frac{4\pi G \Sigma}{c^2} \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \theta \quad (7)$$

فإذا استخدم تعريف المسافة الفعالة للعدسة  $D$ :  $(D = \frac{D_L D_{LS}}{D_S})$ ، وكون  $(4\pi G/c^2)$  مقداراً ثابتاً، فسيتم الحصول على ثابت خاص بكل عدسة هو  $(4\pi G D/c^2)$ ، الذي يمثل مقلوبه ما يعرف بالكثافة السطحية للعدسة<sup>[15,14,13]</sup>:

$$\Sigma_{crit} = \frac{c^2}{4\pi G} (D)^{-1} \quad (8)$$

وتأخذ المعادلة (7) الصيغة:

$$\hat{\alpha}(\theta) = \frac{\Sigma}{\Sigma_{crit}} \theta \quad (9)$$

المرصودة بعيدة جداً والمسافات الزاوية  $(\beta, \theta)$  صغيرة جداً لا تتعدى بضع ثوانٍ قوسية<sup>[12]</sup>، وزاوية الانحناء صغيرة جداً، فإنه يتم استخدام العلاقة  $\theta D_S = \beta D_S + \hat{\alpha}(b) D_{LS}$ ، والمعادلة (2) للحصول على معادلة العدسات المعروفة:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \hat{\alpha}(\vec{\theta}) \quad (3)$$

التي تربط بين الموقع الزاوي للصورة والموقع الزاوي للمصدر وزاوية الانحناء المخفضة. ويستثنى من هذا التقريب حالات كون العدسة ثقباً أسود أو نجماً نيوترونياً، لأن زاوية الانحناء لا تكون صغيرة في هذه الحالات ومن ثم لا يمكن استخدام تقريب  $(\sin \theta = \theta)$  الذي يستخدم في الحصول على المعادلة (3).

### تقريب العدسة الرقيقة ذات الكثافة السطحية المتجانسة

تقوم الدراسات النظرية لعدسات الجاذبية على نمذجتها وفق تقريبات، أهمها تقريب عدسة الكتلة النقطية الذي يفترض أن كتلة العدسة مركزة في نقطة، وتقريب العدسة الرقيقة الذي يفترض أن كتلة العدسة منتشرة على شكل صفيحة، باعتبار أنه عندما تكون العدسة مجرة أو عنقوداً من المجرات، فإن مقارنة المسافة الفاصلة بين المصدر والراصد التي هي حوالي  $(1 \text{ Gpc})$  مع قطر المجرة الموازي لخط الرؤية -سمكها- الذي هو  $(50 \text{ kpc})$  في حالة المجرة أو  $(1000 \text{ kpc})$  في حالة عنقود من المجرات، تتيح اعتبار هذا السمك صفرًا، ومن ثم اعتبار العدسة صفيحة كتلوية رقيقة. وفي هذه الحالة تسمى العدسة، العدسة الرقيقة (thin lens). وتسمى منطقة الانحناء مستوى العدسة. ويمثل الخط العمودي على مستويي العدسة والمصدر المحور البصري للعدسة. وتمثل نقطة تقاطعه مع مستوى العدسة مركز العدسة.

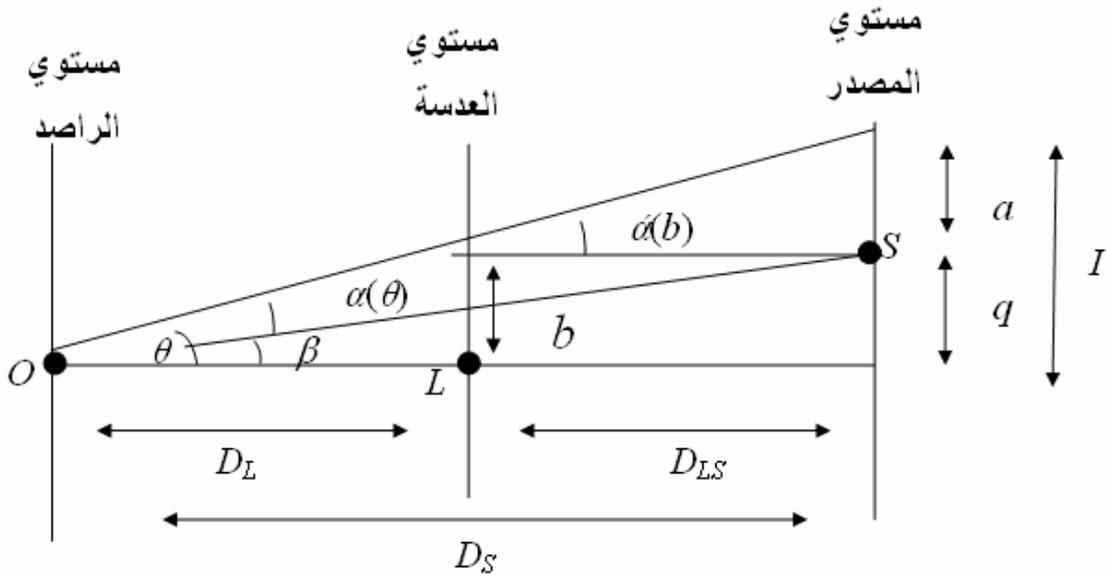
يتيح هذا التقريب التعامل مع الأشعة التي تمر من أية نقطة من مستوى العدسة كما هو الحال مع عدسة شفافة. فتكون زاوية انحناء الأشعة بفعل المجال الجاذبي دالة في بعد موقع مرور الأشعة عن مركز العدسة -عرض الحزمة-  $(b)$  وفي الكثافة الكتلية السطحية للعدسة  $(\Sigma)$ . فتكون الكتلة المسببة للانحناء:

هي أي جسم ذي كتلة مولدة لمجال جاذبي قادر على إحداث انحناء قابل للرصد في مسار الأشعة، والراصد. و يمثل الخط الواصل بين الراصد والعدسة، المحور البصري للعدسة. وتمثل الزاوية المتجهة المحصورة بين المحور البصري والموقع الحقيقي للمصدر  $(\beta)$  البعد الزاوي للمصدر عن المحور البصري، والزاوية المتجهة بين المحور البصري وموقع الصورة  $(\theta)$  البعد الزاوي للصورة. وتكون  $D_L$ ،  $D_S$  هي مسافات القطر الزاوي بين الراصد والعدسة، والعدسة والمصدر، والراصد والمصدر، على التوالي. أما  $\alpha(\theta)$  فهي زاوية الانحناء المخفضة (reduced deflection angle) التي تمثل البعد الزاوي بين المصدر وصورته.

واستخدمت التشوهات الطفيفة التي يحدثها التأثير الجاذبي للمجرات البعيدة في مسارات الأشعة في رسم خرائط أكبر المجرات والعناقيد المجرية الموجودة في الكون<sup>[5]</sup>. واستخدمت عدسات الجاذبية في التقصي عن كمية المادة المظلمة وطبيعتها<sup>[6]</sup>، وعن الطاقة المظلمة<sup>[7]</sup> في الكون. كما استخدمت في الحصول على معلومات عن المعاملات الكونية مثل الكثافة الكونية  $(\Omega)$  والتاريخ الديناميكي للعناقيد المجرية<sup>[8]</sup> ومعامل التعجيل الكوني  $(q_0)$ <sup>[9]</sup> ووجود الثابت الكوني  $(\Lambda)$ <sup>[10]</sup> وحساب مقدار ثابت هبل  $(H_0)$ <sup>[11]</sup>.

### معادلة العدسات

تتكون منظومة عدسة الجاذبية - كما يوضح الشكل (1) - من مصدر بعيد مضيء يرسل الأشعة، وعدسة -



الشكل (1): شكل يوضح عدسة الجاذبية.

المصدر الضوئي (source)  $L$ ؛ العدسة (Lens)  $L$ ؛ الراصد (Observer)  $O$ ؛ بعد الصورة عن المحور البصري  $q$ ؛ بعد المصدر عن المحور البصري  $a$ ؛ بعد الصورة عن المصدر  $\beta$ ؛ الموقع الزاوي للمصدر  $\theta$ ؛ الموقع الزاوي للصورة  $\alpha(b)$ ؛ زاوية الانحناء (deflection angle)  $\alpha(\theta)$ ؛ زاوية الانحناء المخفضة (reduced deflection angle)  $\alpha(\theta)$ ؛ مسافة القطر الزاوي (angular diameter distance) بين الراصد والعدسة.

وترتبط بزاوية الانحناء المخفضة بالعلاقة:

$$\vec{\alpha}(\theta) = \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\alpha}(b) \quad (2)$$

حيث  $(M)$  كتلة العدسة، و  $(G)$  ثابت الجاذبية، و  $(c)$  سرعة الضوء و  $(b)$  عرض الحزمة. ونظراً لأن المصادر

بحسب نظرية النسبية العامة يعاني شعاع الضوء القادم من المصدر  $(S)$  قبل أن يصل إلى الراصد  $(O)$  انحناء في مساره عند العدسة  $(L)$  بزاوية مقدارها  $\hat{\alpha}(b)$ ، حيث

$$\hat{\alpha}(b) = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (1)$$

## المجلة الأردنية للفيزياء

## ARTICLE

## تأثير الأبعاد الهندسية في موقع الصور الناتجة عن عدسة جاذبية رقيقة

M. A. Al-Obayde<sup>a</sup> and S. A. Abraham<sup>a</sup><sup>a</sup> Physics Department, College of Science, Mosul University, Mosul, Iraq.

Received on: 15/10/2009; Accepted on: 6/4/2010

**المخلص:** باستخدام تقريب عدسة الجاذبية الرقيقة، درس البحث تأثير الأبعاد الهندسية للعدسة - التي يكون فيها الانحناء ناتجاً عن مجرة أو عنقود مجرات - في بعد الصور عن المصدر. فتم الحصول على صيغة جديدة لمعادلة العدسات تبين العلاقة بين المتغيرات الأساسية للعدسة، وتساعد في دراسة توزيع الكتلة في المجرة أو مجموعة المجرات التي تتصرف كعدسة. وبينت النتائج أن لنموذج العدسة تأثيراً في قيمة ثابت هبل الذي يمكن إيجاده باستخدام عدسات الجاذبية. وأوضح البحث أن تأثير بعد العدسة عن الراصد في موقع الصورة يتناقص عندما تكون العدسة بعيدة جداً عن الراصد وأن تأثير عرض الحزمة في موقع الصورة في تقريب العدسة الرقيقة يكون بعكس تأثيره الذي يظهر في تقريب عدسة الكتلة النقطية. كلمات مفتاحية: عدسة جاذبية؛ عدسة جاذبية رقيقة؛ انحناء الضوء؛ النسبية العامة.

## The Effect of Geometrical Dimensions on the Image Position of the Thin Gravitational Lens

**Abstract:** When the gravitational lens is a galaxy or a galactic cluster, the effect of geometrical dimensions of the lens on the separation between the source and the image has been studied by using the thin lens approximation. A new form of the lens equation has been found. This equation shows the relationships between the basic parameters of the lens and helps in studying the mass distribution in the galaxy or the galactic cluster that behaves as a lens.

This research clarifies that, at a very large distance between the observer and the lens, the effect of distance from the observer to the lens on the image position decreases. Also, it shows that the effect of the impact parameter in the thin lens approximation is opposite to that which appears in the point mass approximation.

**Keywords:** Gravitational lens; Thin gravitational lens; Light bending; General relativity.

## مقدمة

البعيدة التي لا يمكن رؤيتها حتى باستخدام أكبر التلسكوبات الصناعية المتطورة وأضحها<sup>[1]</sup>. واهتمت تطبيقات الانحناء الجاذبي بدراسة الأجسام التي تكون مسؤولة عن انحناء الضوء<sup>[2]</sup>، ودراسة انتشار الكتلة على مختلف المقاييس<sup>[3]</sup>، ودراسة الصور وتشوهاتها، وتكبير المصادر الأصلية وتصغيرها<sup>[4]</sup>.

بعد اكتشاف أول عدسة جاذبية في عام 1979 تزايد اهتمام الفلكيين وعلماء الكون بظاهرة الانحناء الجاذبي (gravitational lensing) وعدسات الجاذبية، وصارت الأخيرة أداة رئيسية للدراسات الكونية المعاصرة، ولاكتشاف أسرار الكون البعيد وخفاياه، لأنها تتصرف كتلسكوبات طبيعية تمكن من رؤية الأجسام